

Adı Soyadı:

24.04.2022

Numara:

**MAT 204 ANALİTİK GEOMETRİ II DERSİ ARASINAV SORULARI**

- 1)  $x^2 + 4y^2 - 6x - 4y = 0$  koniğini standart hale getirerek grafiğini çiziniz.
- 2)  $2x^2 - xy - y^2 + x + y = 0$  koniğinin çeşidini belirleyiniz.
- 3)  $x^2 - 2\lambda xy + y^2 + 4x + 4y + 10 = 0$  konik ailesindeki koniklerin merkezlerinin geometrik yerini bulunuz.
- 4)  $x^2 + 4xy - y^2 + x - 4y + 2 = 0$  koniği veriliyor.  $3x - y + 21 = 0$  doğrusuna dik olan doğrultuya göre koniğin eşlenik çapını bulunuz.
- 5)  $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$  koniğinin eksenlerinin denklemlerini ve tepe noktalarını bulunuz.
- 6)  $3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 3y + 3 = 0$  koniğinin asimptotlarını (varsa) bulunuz.
- 7)  $4y^2 - 25x = 0$  koniğinin odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.

**Not: Süre 90 dakikadır.**

**Prof. Dr. Emin KASAP**

**CEVAP ANAHTARI**

- 1)  $A=1, B=0, C=4$  olup  $4AC - B^2 = 16 > 0$  olduğundan konik elips sınıfındadır.
- $y=0 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-6) \Rightarrow x=0, x=6 \Rightarrow (0,0)$  ve  $(6,0)$  noktalarından geçer.
- $x=0 \Rightarrow 4y^2 - 4y = 0 \Rightarrow 4y(y-1) = 0 \Rightarrow y=0, y=1 \Rightarrow (0,0)$  ve  $(0,1)$  noktalarından geçer.

Koordinat eksenlerini bir  $(h,k)$  öteleme vektörüyle öteleyelim.

$$\Phi(x,y) = x^2 + 4y^2 - 6x - 4y = 0$$

olsun.  $\Phi_x = 2x - 6, \Phi_y = 8y - 4$  olup

$$\Phi_x(h,k) = 2h - 6, \Phi_y(h,k) = 8k - 4$$

olur.

$$\phi_x(h,k) = 2h - 6 = 0 \Rightarrow (h,k) = (3, \frac{1}{2})$$

$$\phi_y(h,k) = 8k - 4 = 0$$

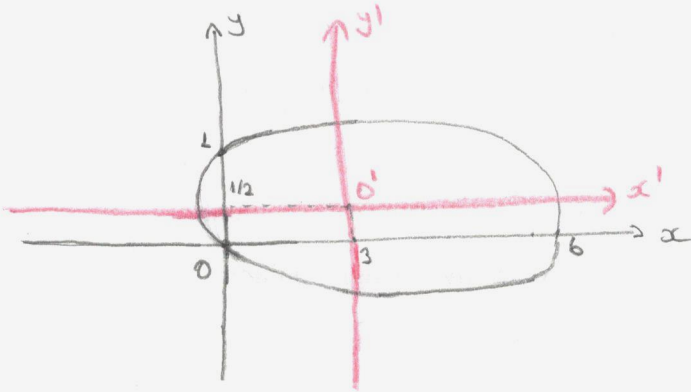
bulunur. Ayrıca  $F' = \phi(3, \frac{1}{2})$  olup

$$F' = \phi(3, \frac{1}{2}) = 9 + 1 - 18 - 2 = -10$$

dur. Böylece koninin  $x'y'$  sistemindeki denklemini

$$x'^2 + 4y'^2 - 10 = 0 \Rightarrow \frac{x'^2}{10} + \frac{y'^2}{\frac{5}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{(\sqrt{10})^2} + \frac{y'^2}{(\sqrt{\frac{5}{2}})^2} = 1$$

bulunur. Koninin grafiği



birimindedir.

2)  $A=2, B=-1, C=-1, D=1, E=1, F=0$  dur.

$4AC - B^2 = -8 - 1 = -9 < 0$  olduğundan konik hiperbol sınıfındadır.

$$K = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4(-1) + 1(-1) + 1(-1+2) = -4 \neq 0$$

oldüğünden konik hiperboldür.

3)  $A=1, B=-2\lambda, C=1$  dur

$$4AC - B^2 = 4 - 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow 4(1 - \lambda^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$\lambda = \pm 1$  için konik parabol sınıfındadır.  $\lambda \neq \pm 1$  için konik ailesindeki

koniklerin mertezlerinin geometrik yemini bulalım

$$\phi(x,y) = x^2 - 2\lambda xy + y^2 + 4x + 4y + 10 = 0$$

$$\text{olsun. } \phi_x = 2x - 2\lambda y + 4, \quad \phi_y = -2\lambda x + 2y + 4 \quad \text{dur.}$$

3. cevabın devamı-) Kiriş ailesindeki kirişlerin merkezlerini  $M(x,y)$  ile gösterelim.

$$\begin{aligned} \phi_x|_M &= 2x - 2\lambda y + 4 = 0 \\ \phi_y|_M &= -2\lambda x + 2y + 4 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x - \lambda y = -2 \\ \lambda x - y = 2 \end{cases}$$

olur

$$\begin{cases} x - \lambda y = -2 \\ -\lambda / \lambda x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \lambda y = -2 \\ -\lambda^2 x + \lambda y = -2\lambda \end{cases}$$

$$\underline{+}$$

$$x = \frac{-2 - 2\lambda}{1 - \lambda^2} \dots (1)$$

bulunur

$$\begin{cases} -\lambda / x - \lambda y = -2 \\ \lambda x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda x + \lambda^2 y = +2\lambda \\ +\lambda x - y = 2 \end{cases}$$

$$\underline{+}$$

$$y = \frac{2\lambda + 2}{\lambda^2 - 1} = \frac{-2\lambda - 2}{1 - \lambda^2} = x$$

$$\Rightarrow y = x$$

olur. Kiriş ailesindeki kirişlerin merkezleri  $y=x$  doğrusu üzerindedir.

4) d...  $3x - y + 21 = 0 \Rightarrow y = 3x + 21 \Rightarrow m_d = 3$  olur.

$$m \cdot m_d = -1 \Rightarrow m \cdot 3 = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3} \text{ doğrusunu bulunur}$$

$$\phi(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 + x - 4y + 2 = 0$$

olsun.

$$\phi_x = 2x + 4y + 1, \quad \phi_y = 4x - 2y - 4$$

olup kirişin  $m = -\frac{1}{3}$  doğrultusuna göre çap denklemini

$$\phi_x - \frac{1}{3} \phi_y = 0 \Rightarrow 2x + 4y + 1 - \frac{1}{3}(4x - 2y - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 6x + 12y + 3 - 4x + 2y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 14y + 7 = 0$$

bulunur.

$$5) A=6, B=-4, C=9 \text{ olup } 4AC-B^2=216-16=200 > 0$$

olduğundan konik elips sınıfındadır. Koninin asal doğrultularının denklemleri

$$Bm^2 + 2(A-C)m - B = 0 \Rightarrow -4m^2 - 6m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$\frac{2m}{m} \quad \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow (2m-1)(m+2) = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}, m = -2$$

olsun

$$\Phi(x,y) = 6x^2 - 4xy + 3y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$$

olsun.

$$\Phi_x = 12x - 4y - 4, \quad \Phi_y = -4x + 18y - 32$$

olsun.  $m = \frac{1}{2}$  için eksen denklemleri

$$\Phi_x + \frac{1}{2} \Phi_y = 0 \Rightarrow 12x - 4y - 4 + \frac{1}{2}(-4x + 18y - 32) = 0$$

$$\Rightarrow 24x - 8y - 8 - 4x + 18y - 32 = 0$$

$$\Rightarrow 20x + 10y - 40 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + y - 4 = 0$$

bulunur.  $m = -2$  için eksen denklemleri

$$\Phi_x - 2\Phi_y = 0 \Rightarrow 12x - 4y - 4 - 2(-4x + 18y - 32) = 0$$

$$\Rightarrow 12x - 4y - 4 + 8x - 36y + 64 = 0$$

$$\Rightarrow 20x - 40y + 60 = 0$$

$$\Rightarrow x - 2y + 3 = 0$$

bulunur.

Şimdi tepe noktalarını bulalım

$y = -2x + 4$  konik denkleminde yazılırsa

$$6x^2 - 4x(-2x+4) + 3(-2x+4)^2 - 4x - 32(-2x+4) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 8x^2 - 16x + 36x^2 - 144x + 144 - 4x + 64x - 64 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 50x^2 - 100x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 10x + 1 = 0$$

$$D = 100 - 20 = 80 \text{ olup } x_1 = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{10} = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad x_2 = \frac{10 - 4\sqrt{5}}{10} = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$y_1 = 2 - \frac{4\sqrt{5}}{5}, \quad y_2 = 2 + \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ olup } \left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}, 2 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \text{ ve } \left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}, 2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \text{ tepe noktalarıdır.}$$

5. cevabın devamı:-)

$x = 2y - 3$  konik denkleminde yazılırsa

$$6(2y-3)^2 - 4y(2y-3) + 3y^2 - 4(2y-3) - 32y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 24y^2 - 72y + 54 - 8y^2 + 12y + 3y^2 - 8y + 12 - 32y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 25y^2 - 100y + 60 = 0$$

$$\Rightarrow 5y^2 - 20y + 12 = 0$$

$$\text{olur. } \Delta = 400 - 240 = 160 \Rightarrow y_1 = \frac{20 + 4\sqrt{10}}{10} = 2 + \frac{2\sqrt{10}}{5}, y_2 = \frac{20 - 4\sqrt{10}}{10} = 2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$x_1 = 1 + \frac{4\sqrt{10}}{5}, x_2 = 1 - \frac{4\sqrt{10}}{5} \text{ olur.}$$

$\left(1 + \frac{4\sqrt{10}}{5}, 2 + \frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$  ve  $\left(1 - \frac{4\sqrt{10}}{5}, 2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$  tepe noktalarıdır

6)  $A = 3, B = -10, C = 3 \Rightarrow 4AC - B^2 = 36 - 100 = -64 < 0$

olduğundan konik hiperboldür ve asimptotları vardır. Asimptotik doğruların denklemleri

$$Cm^2 + Bm + A = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 3m^2 - 10m + 3 = 0 \\ m & -3 \\ 3m & -1 \end{matrix} \Rightarrow (m-3)(3m-1) = 0 \Rightarrow m = 3, m = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

$$\Phi(x, y) = 3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 3y + 3 = 0 \text{ alınır}$$

$$\Phi_x = 6x - 10y + 1, \Phi_y = -10x + 6y - 3 \text{ olur } m = 3 \text{ için asimptot denklemleri}$$

$$\Phi_x + 3\Phi_y = 0 \Rightarrow 6x - 10y + 1 + 3(-10x + 6y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 6x - 10y + 1 - 30x + 18y - 9 = 0$$

$$\Rightarrow -24x + 8y - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - y + 1 = 0$$

bulunur.  $m = \frac{1}{3}$  için asimptot denklemleri

$$\Phi_x + \frac{1}{3}\Phi_y = 0 \Rightarrow 6x - 10y + 1 + \frac{1}{3}(-10x + 6y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 18x - 30y + 3 - 10x + 6y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 8x - 24y = 0$$

$$\Rightarrow x - 3y = 0$$

bulunur

$$7) \quad 4y^2 - 25x = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{25x}{4} \quad \text{dir.}$$

$F(c, 0)$  odaklı parabolün denklemini  $y^2 = 4cx$  biçimindedir.

0 halde  $4c = \frac{25}{4} \Rightarrow c = \frac{25}{16}$  bulunur. Böylece parabolün

odakları  $F\left(\frac{25}{16}, 0\right)$  ve  $F\left(-\frac{25}{16}, 0\right)$  bulunur. Parabolün dış

merkezliği  $\perp$  dir.